Les nombres et les formes

Ngô Bảo Châu

Dans le seul papier qu'il a écrit sur la théorie des nombres "Sur les nombre premiers plus petits qu'une magnitude donnée", Riemann a imprimé sa marque sur le développement de ce domaine pour des siècles qui suivent. Les nombres premiers dont l'apparition dans l'énumération des nombres naturels paraît si sporadique, suivent une loi de nature statistique plus simple qu'on pouvait s'y attendre. Riemann a montré que cette loi, le théorème des nombres premiers, est dictée par l'emplacement des zéros d'une seule fonction analytique, la fonction zeta. Il a aussi formulé son célèbre hypothèse sur l'emplacement de ces zéros qui reste encore un grand mystère à ce jour. Le théorème des nombres premiers a été démontré plus tard par Hadamard et de la Vallée-Poussin lesquels s'appuient sur une forme faible de l'hypothèse de Riemann. Avant d'énoncer son hypothèse, Riemann a étudié les propriétés analytiques de sa fonction zeta qui incluent une équation fonctionnelle, une symétrie étonnante qui ne cesse de nous hypnotiser jusqu'à ce jour.

Dans sa dissertation inaugurale "Sur les hypothèses qui fondent la géométrie", Riemann a apporté des idées qui ont profondément bouleversé ce qu'on entend même par géométrie avec des répercussions jusqu'à la théorie de la gravitation. Après Riemann, un nouvel accent est mis sur les formes d'objets géométrique, souvent de grande dimension, au détriment des propriétés particulières d'un tel triangle et des telles sections coniques.

Riemann lui-même n'a peut-être pas soupçonné l'existence de liens entre ses deux mémoires. Ces liens ont été découverts de fil en aiguille cours du vingtième siècle et souvent portaient des germes des développement de grande ampleur.

André Weil a mis en évidence l'analogie formelle entre la structure des nombres rationnels et celle des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann par le biais des fonctions rationnelles sur une courbe définie sur un corps fini. Il a formulé l'analogie de l'hypothèse de Riemann pour les dernières et l'a démontrée par les outils de la géométrie algébrique. Avec audace, il a conjecturé que la forme de l'hypothèse de Riemann qu'il a démontrée ne devrait pas être limitée aux courbes, objets géométriques de dimension un mais devrait être valide en n'importe quelle dimension. Il a prophétisé l'existence des théorie homologique pour des variétés algébriques définies sur des corps finis dont on peut tirer l'analogue de l'hypothèse de Riemann des axiomes.

La première théorie homologique pour les espaces topologiques a été inventée par Henri Poincaré au début du vingtième siècle. Il s'agit de définir des invariants qu'on pourrait attacher aux espaces généraux dont le premier est certainement le genre des surfaces que Riemann a mis en évidence dans sa dissertation. L'intuition de Weil que ces invariants topologiques du monde des formes devrait se propager aux variétés algébriques sur les corps finis qui appartiennent a priori au monde des nombres est aussi audacieuse que féconde. Le développement extraordinaire de la géométrie algébrique du milieu du vingtième siècle sous l'égide de Grothendieck a été fortement motivé par la construction des théories homologique de Weil. Ces développements ont été couronnés par la démonstration de l'hypothèse de Riemann pour les variétés algébriques définies sur les corps finis par Deligne au début des années 70.

Un peu avant la preuve des conjectures de Weil par Deligne, Langlands a formulé un ensemble de conjectures dont l'audace rivale et peut-être dépasse celles de Weil. Il a mis en évidence toute une famille de fonctions analytiques, des fonctions L lesquelles seraient attachées au formes automorphes aussi découvertes par Poincaré. Les fonctions L automorphes sont définies par une procédure qui rappelle celle qui donne naissance à la fonction zeta de Riemann et forment la famille naturelle dont la fonction zeta est un membre. Langlands a conjecturé que ses fonctions L ont un prolongement analytique et satisfont une équation fonctionnelle similaire à celle de la fonction zeta. Il a relié cette conjecture aux structures régissant les représentations linéaires des groupes de Lie. Il a aussi conjecturé que les fonctions L automorphes portent en elles le plus clair des informations numériques des cohomologies de Weil des variétés algébriques définies sur nombres rationnels. Les conjectures de Langlands ont transformé profondément la recherche en théorie des nombres. En particulier, elles ont rendu possible l'avancée spectaculaire de Wiles dans les année 90 sur la conjecture de Tanyiama–Weil sur les courbes elliptiques, aboutissant à la première démonstration du dernier théorème de Fermat. Des années 90 ont aussi été témoins de la naissance d'une toute nouvelle branche des mathématiques, la théorie de Langlands géométrique initiée par Drinfeld et Gérard Laumon. Il s'agit de nouveau un lien fécond entre le monde concret des nombres et le monde abstrait des formes géométriques.

Mes propres travaux, se situant dans la continuité de ceux de Drinfeld et Laumon, portent sur ce que Langlands a appelé le lemme fondamental, un nom qui sous-entend quelque chose de nature un peu technique. Il s'agit des égalités entre centaines intégrales orbitales qui apparaissent dans l'analyse harmonique sur les groupes de Lie. L'étendue des difficultés s'avérait plus grande que ce à quoi on pouvait s'attendre de première vue car les nombres qui mesurent ces intégrales orbitales sont encore à ce jour incalculables. La résolution du lemme fondamental s'appuie sur l'idée que l'égalité entre ces nombres mystérieux devrait résulter de la comparaison entre certaines formes géométriques. En particulier, des objets géométriques reliés à la mécanique classique, en l'occurrence aux mouvements des toupies, qu'on appelle des systèmes complètement intégrables de Hitchin, ont été capables d'expliquer le lemme fondamental de Langlands. Il me semble que depuis l'antiquité jusqu'à nos jours, le mathématicien est toujours à la recherche d'un lien tant tôt solide et éclatant, tant tôt ténu et mystérieux entre le monde des nombres et celui des formes. Ces deux mondes ne cessent de s'éclairer et nous éclairent par la même occasion.

En rappelant des noms illustres dont beaucoup a fait partie de cette assemblée, je mesure toute l'honneur que vous m'avez faite en m'admettant en son sein.

Je vous remercie pour votre attention.

Discours de réception à l'Académie des sciences à Paris
20 juin 2017